

## 課題名 (タイトル) : レプトン異常磁気能率の QED 摂動 10 次項の数値計算

利用者氏名 : 仁尾 真紀子

所属 : 初田量子ハドロン物理学研究室

## 1. 本課題の研究の背景、目的、関係するプロジェクトとの関係

電子やミュオン粒子は、物質を構成する最も基本的な単位である素粒子のうちレプトンに分類される。ともに電荷とスピンをもち、光子と電磁気的な相互作用をする。電子やミュオン粒子単体が示す外部磁場への応答は、固有の性質を示す物理量の一つで、磁気能率によって決められ、その大きさは  $g$  因子という数で表される。

電子やミュオン粒子のような内部構造のない点粒子の場合、ディラックの相対論的な量子力学からの帰結として、 $g$  因子の値は  $g=2$  と整数となることが知られている。ところが実際に測定してみると、 $g$  は 2 より 0.1%ほど大きい。この  $g$  の 2 からのずれ  $a=(g-2)/2$  を異常磁気能率あるいは簡単に  $g-2$  と呼ぶ。レプトン粒子の場合、 $g-2$  の値は  $10^{-7}$  から  $10^{-9}$  という高い相対精度で測定することが可能で、理論値も同程度まで到達することが可能である。レプトン  $g-2$  の実験値と理論値を比較検討することで、素粒子の標準理論を精密検証し、さらに現代物理学の骨幹である量子力学そのものを検証することが可能となる。

電子  $g-2$  の実験はハーバード大学で行われており、2008 年に最新値が発表された。現在は陽電子  $g-2$  の測定のための準備が進められている。

ミュオン  $g-2$  の実験には、電子の場合よりも大掛かりな実験設備を必要とする。最新値は 2004 年の米国ブルックヘブンで得られたものだ。この値の一桁の改良を目指して、米国のフェルミラボと日本の J-PARC で独立な 2 つの実験準備が同時進行しており、共に数年後のデータ採取を目指している。

また、電子の  $g-2$  においては、測定値を理論式と等しいとすることで、電磁気力の結合定数である微細構造定数  $\alpha$  の値を世界最高の相対精度  $2.4 \times 10^{-10}$  で決定することができる。2018 年にはプランク定数  $h$  や電気素量  $e$  などが現在の光速  $c$  と同様に定義化され、さらに質量標準が現在の

$kg$  原器からプランク定数に基づいた定義へと変更される予定だ。それに伴い、真空の透磁率  $\mu_0$  や電子の質量  $m_e$  など多くの基本物理定数値の不確かさは、微細構造定数  $\alpha$  の不確かさに拠ることとなり、本研究での  $g-2$  の理論計算が基礎物理定数の決定に果たす役割は今以上に大きなものとなる。

本研究では電子およびミュオン粒子  $g-2$  へ主寄与を与える QED からの寄与を、微細構造定数  $\alpha$  のべき級数の係数として ( $\alpha$  の摂動計算として)、正確に求めることを行う。数値計算の遂行には膨大な計算機資源を必要とし、理研で数値計算を行うようになってからでも、すでに 10 年以上を経ている。ただ、やみくもに精度をあげるためだけの計算を行うのではなく、実験の精度を念頭に、パイ中間子などのハドロン類からの寄与の不確かさよりも QED からの不確かさを小さくするという、物理的に意味のある最終ゴールを設定して、研究を遂行する。

## 2. 具体的な利用内容、計算方法

接動 10 次、すなわち電子と光子の相互作用が 10 回起こる過程は、ファインマン図という素粒子の描く線図で表すことができる (図 1 参照)。この図のうち、電子の軌道がループ状になっていないものが、本研究のターゲットである。これらの特徴を持つ、私たちが Set V と呼ぶファインマン図の数は 5000 個以上あり、共通な量子補正を表す図をまとめると、389 個の独立積分に帰着する。

これらの 389 個の積分は 9 から 13 次元の多次元積分で表現されており、モンテカルロ法を用いた数値積分アルゴリズム VEGAS で評価する。多次元数値積分の実行のためのアルゴリズムは他にも色々知られているが、今のところ QED  $g-2$  の 6 次以上の補正項を破綻なく評価できるものは VEGAS のみである。

QED  $g-2$  の計算には紫外と赤外の 2 種の発散が被積分関数に存在しており、これらは私たちの独自ルールで生成したカウンター項を当てることで

積分値を有限としている。ちなみに 1 個の積分の被積分関数は約 10 万行、カウンター項の数は図の構造により、2 から最大 161 個を要する。1 個の積分をコンパイルするためには、1 プロセスでの実行で約 2 時間前後を要する。

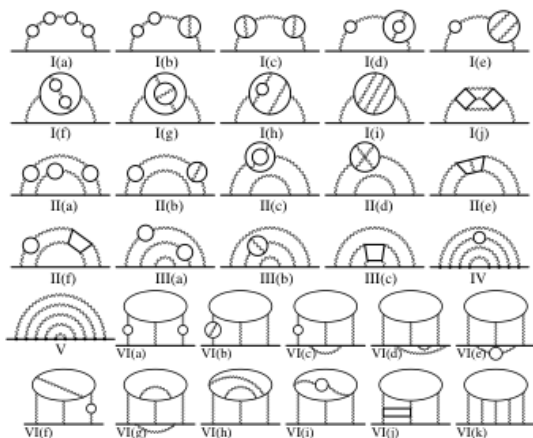


図 1 QED 摂動 10 次の図の例。このうち光子(波線で表現)のみの補正を受ける Set V (1 列下から 2 番目の図) には、光子と電子(直線で表現)が相互作用する順序によって全部で 389 通りが存在する。ただし、鏡映反転(物理的には時間反転に相当)で一致する図は同じと見なす。

紫外発散のみを含む 135 個の積分 (XL と呼ぶ) においては、倍精度実数で計算を実行することができ、比較的少ない計算量で精度の良い答が得られる。それに反して、赤外発散を含む残りの 254 個 (XB と呼ぶ) の積分では、発散が光子質量のべきに反比例するような形で起こり、カウンター項との相殺の際に桁落ちが頻繁に発生する。これを避けるため、擬 4 倍精度実数のライブラリを用いて計算を実行する。

10 次、Set V の 389 個の積分の実行状況は次の通りである。

- 1) 2005~2009 年 RSCC における倍精度実数での予備的な計算の実行。XL+XB389 個全て。
- 2) 2009~2012 年 RICC における擬 4 倍精度実数を用いた XB の計算。

以上の経由を経て、2012 年に摂動 10 次の全ての結果を初めて発表することができた。

その後、さらに RICC において 8 次及び 10 次において誤差の大きな積分に集中的に計算資源を投下し、g-2 計算の全体の精度の向上を目指した。

結果を 2014 年の年末に公開した。この結果は基礎物理定数の最新の決定に採択され、微細構造定数  $\alpha$  の CODATA2014 推奨値を決めている。

2012 年と 2014 年の計算結果を個々の積分で比較して判明したことは、現在の数値積分計算での被積分関数の統計サンプル数は決して十分と言えるものではないということである。より良い積分のグリッド構造を実現できる積分パラメタの取り方をした場合にのみ、現在の統計サンプル数でも信頼性の高い積分結果が得られる。そこで、10 次の積分 389 個全てにおいて、積分パラメタの取り方を変更し、再計算を行うことで、積分値とその不確かさの検証を行うことを計画した。

### 3. 結果

2015 年に Hokusai-GW 導入されてしばらくは、その simd 機構を最も有効利用するためのプログラム内変数の調整に時間を費やした。移植半年後に Hokusai-GW の運用が安定してから、順に 389 個の積分の予備的な実行を行い、個々の積分での最適な積分グリッドの形成を行なった。

2016 年からはこの積分グリッドを用いて、生産的な計算の実行に移行した。XB の中でも特に計算が難しく、多くの統計サンプル数を要するものを Hokusai-GW で実行し、XB の中でも比較的収束の早いものと XL すべてを RICC で実行した。GW では 512 または 256 コア並列で、RICC では 128 コア並列とし、バッチジョブの時間制限内(GW で 24H、RICC で 72H)で 1 イタレーションが実行可能なサンプル数 25.6 億または 40 億を用いた。イタレーションは最低でも 2 回行い、積分値の不確かさが 0.025 以下になった段階で計算を停止した。2017 年 2 月の段階で、積分 389 個のうち 336 個が上の目標値に到達し、GW で 37 個、RICC で 16 個の積分計算が残っており、現在も実行中である。

### 4. まとめ

以上の計算結果から、2015 年以降の再計算の途中結果として、10 次 Set V の g-2 への寄与

$$A_1^{(10)}[\text{setV}(2015-)] = \text{XXXX} \pm 0.42$$

を得た(XXXX の部分は現時点では非公開)。これは CODATA2014 に採択され、2014 年までの全ての計算結果を統計的に足し合わせた結果(ただし XB の RSCC での倍精度計算は信用性が低いので除外し

ている)と誤差の範囲内で一致している。また個々の積分でも計算結果は誤差の範囲内で一致しており、双方の計算を個々の積分で合算できる。その結果、10 次の係数  $A_1^{(10)}$  の不確かさは 0.25 まで圧縮することができた。

なお、RICC においては配分された計算時間をほぼ予定通りに消化できたが、GW においては 2 月 20 日時点で 55% 程度である。消化率の低さの理由は、研究の遅滞を意味するものではないことは強調しておきたい。本研究課題の数十本のジョブが恒常的にバッチキューに待機しており、ジョブの消化率は個人ユーザーのコントロールの範疇外である。年度当初に決められた研究課題の優先度と全ユーザーからの日毎の計算時間要求によって、バッチジョブ処理システムのフェアシェア機能により自動的に決められている。

5. 今後の計画・展望

2015 年~2016 年にレプトン  $g-2$  の摂動 8 次の値が数値積分とは異なる方法を用いた結果が別のグループによって発表された。特に Laporta による  $A_1^{(8)}$  の計算は差分方程式を数値的に解くというもので、20 年にわたる研究の成果であって特筆に値する。結果は私たちの数値計算と誤差の範囲内で完全一致した。これによってレプトン  $g-2$  の QED8 次は完全に確立されたと言える。8 次において、私たちの数値計算をさらに推し進める必要は無くなった。

一方、10 次においては私たちの数値積分の方法以外での計算は、今の所目処さえ立っていない。10 次の係数の不確かさを現在の 0.25 から 0.20 へ圧縮することができれば、電子  $g-2$  への QED の寄与の不確かさはハドロンからの寄与のそれよりも小さなものとなり QED  $g-2$  研究の一応のゴールに到達する。

2017 年 7 月 1 日は基礎物理定数を決定するための業績の締切日として CODATA の基礎物理定数の Task Group により設定された締切日である。前回の 2014 年 12 月 31 日から通常の 4 年毎ではなく早めに設定されているのは、ここでもう一度、基礎物理定数の相互整合性を見直し、2018 年 11 月に予定されている国際度量衡会議 (CIPM) でのプランク定数  $h$ 、アボガドロ数  $N_A$ 、電気素量  $e$ 、ボル

ツマン定数  $k_B$  の定義化に用いられる具体的な数値を決定するためである。現在の光速  $c=299\,792\,458$  m/s の 9 桁と同じくだ。電子  $g-2$  から決定される微細構造定数  $\alpha$  は、これらの定数の相互検証に大きな役割を果たしている (表 1 参照)。Set V の数値計算を 7 月までに最終ゴールの不確かさ 0.20 まで持つてゆくことは、残っている積分の評価の困難さから難しいと考えているが、そこに至らなくても途中結果として改良値を報告したいと考えている。

表 1 2018 年 11 月に採択予定のプランク定数  $h$ 、アボガドロ数  $N_A$ 、電気素量  $e$ 、ボルツマン定数  $k_B$  の定義化前後の基本物理定数の不確かさ。改定後はほとんど全ての物理定数の不確かさが微細構造定数  $\alpha$  によっていることが分かる。Wikipedia “Proposed redefinition of SI base units” より再掲。

Constant	Symbol	Current definition			Proposed definition	
		Relation to directly measured and fixed constants	Significant factor(s) in uncertainty	Relative uncertainty	Relation to directly measured and fixed constants	Significant factor(s) in uncertainty
Mass of International Prototype Kilogram <sup>[Note 7]</sup>	$m(\text{K})$	1 kg	N/A	exact	$m(\text{K})$	$m(\text{K})$
Planck constant	$h$	$\frac{8\alpha}{c\mu_0 K_J^2}$	$K_J^2$	$1.2 \times 10^{-8} \approx 2u_e(K_J)$	$6.626\,070\,040 \times 10^{-34}$ <sup>[Note 3]</sup> kg·m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup>	N/A
Josephson constant	$K_J$	$K_J$	$K_J$	$6.1 \times 10^{-9} = u_e(K_J)$	$\frac{2e}{h}$	N/A
Von Klitzing constant	$R_K$	$\frac{c\mu_0}{2\alpha}$	$\alpha$	$2.3 \times 10^{-10} = u_e(\alpha)$	$\frac{h}{e^2}$	N/A
Elementary charge	$e$	$\frac{4\alpha}{c\mu_0 K_J}$	$K_J$	$6.1 \times 10^{-9} \approx u_e(K_J)$	$1.602\,176\,6208 \times 10^{-19}$ <sup>[Note 3]</sup> A·s	N/A
Magnetic constant	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ m·kg·s <sup>-2</sup> ·A <sup>-2</sup>	N/A	exact	$\frac{2hc}{e^2}$	$\alpha$
Vacuum permittivity	$\epsilon_0$	$\frac{1}{c^2\mu_0}$	N/A	exact	$\frac{e^2}{2hc\alpha}$	$\alpha$
Impedance of free space	$Z_0$	$c\mu_0$	N/A	exact	$\frac{2hc\alpha}{e^2}$	$\alpha$
Electron mass	$m_e$	$\frac{16R_{\infty}}{c^2\alpha\mu_0 K_J^2}$	$K_J^2$	$1.2 \times 10^{-8} \approx 2u_e(K_J)$	$\frac{2hR_{\infty}}{c\alpha^2}$	$\alpha^2$
Electron molar mass	$M(e)$	$A_e(e)M_A$	$A_e(e)$	$2.9 \times 10^{-11} = u_e(A_e(e))$	$\frac{2hR_{\infty}N_A}{c\alpha^2}$	$\alpha^2$
Unified atomic mass unit or dalton	$m_u = 1u$ $m_{Da} = 1Da$ <sup>[Note 8]</sup>	$\frac{16R_{\infty}}{c^2\alpha\mu_0 K_J^2 A_e(e)}$	$K_J^2$	$1.2 \times 10^{-8} \approx 2u_e(K_J)$	$\frac{2hR_{\infty}}{c\alpha^2 A_e(e)}$ $\frac{M_{Da}}{N_A}$	$\alpha^2$ N/A
Molar mass constant	$M_u$ $M_{Da}$	1 g mol <sup>-1</sup> = 0.001 kg mol <sup>-1</sup>	N/A	exact	$\frac{2hR_{\infty}N_A}{c\alpha^2 A_e(e)}$	$\alpha^2$ N/A
Avogadro constant	$N_A$	$\frac{c^2\alpha\mu_0 K_J^2 A_e(e)M_u}{16R_{\infty}}$	$K_J^2$	$1.2 \times 10^{-8} \approx 2u_e(K_J)$	$6.022\,140\,857 \times 10^{23}$ <sup>[Note 3]</sup> mol <sup>-1</sup>	N/A
Atomic mass of carbon-12	$m(^{12}\text{C})$	$\frac{192R_{\infty}}{c^2\alpha\mu_0 K_J^2 A_e(e)}$	$K_J^2$	$1.2 \times 10^{-8} \approx 2u_e(K_J)$	$\frac{24hR_{\infty}}{c\alpha^2 A_e(e)}$	$\alpha^2$
Molar mass of carbon-12	$M(^{12}\text{C})$	12 g mol <sup>-1</sup> = 0.012 kg mol <sup>-1</sup>	N/A	exact	$\frac{24hR_{\infty}N_A}{c\alpha^2 A_e(e)}$	$\alpha^2$
Faraday constant	$F$	$\frac{c\alpha^2 K_J A_e(e)M_u}{4R_{\infty}}$	$K_J, \alpha^2$	$6.2 \times 10^{-8} \approx u_e(K_J)$ <sup>[Note 9]</sup>	$eN_A$	N/A
Temperature of triple point of water	$T_{TPW}$	273.16 K	N/A	exact	$T_{TPW}$	$T_{TPW}$
Molar gas constant	$R$	$R$	$R$	$5.7 \times 10^{-7} = u_e(R)$	$kN_A$	N/A
Boltzmann constant	$k$	$\frac{16RR_{\infty}}{c^2\alpha\mu_0 K_J^2 A_e(e)M_u}$	$R$	$5.7 \times 10^{-7} \approx u_e(R)$	$1.380\,648\,52 \times 10^{-23}$ <sup>[Note 3]</sup> kg·m <sup>2</sup> ·K <sup>-1</sup> ·s <sup>-2</sup>	N/A
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma$	$\frac{256\pi^5 R^4 R_{\infty}}{15c^2 \alpha^7 \mu_0 K_J^4 A_e(e)^4 M_u^4}$	$R^4$	$2.3 \times 10^{-8} \approx 4u_e(R)$	$\frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$	N/A

( $c$  = speed of light,  $\alpha$  = fine-structure constant,  $R_{\infty}$  = Rydberg constant.)

平成 28 年度 利用研究成果リスト

【国際会議、学会などでの口頭発表】

Makiko Nio, “QED contributions to the muon  $g-2$ ,” invited talk at the International Workshop “Storage Rings and Tests of Fundamental Symmetries”, March 2, 2016, RIKEN, Wako, Saitama, Japan.

Makiko Nio, “Higher-order QED contributeons to muon  $g-2$ ,” invited talk at the International Workshop “Towards high precision muon  $g-2$ /EDM measurement at J-PARC,” November 28-29, 2016, J-PARC, Tokai, Ibaraki, Japan.